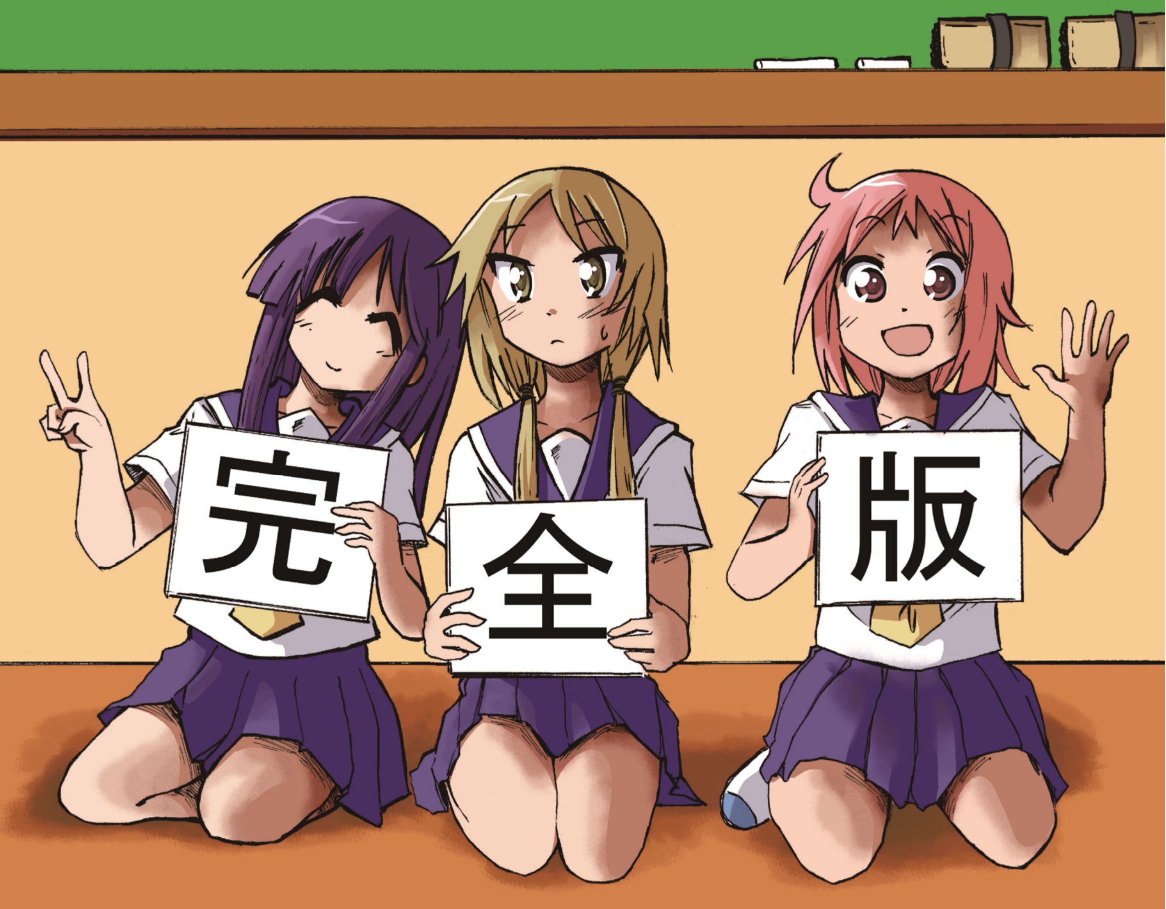
「1＋1＝2」に対する考察 withゆゆ式



「1+1=2」に対する考察

with ゆゆ式 完全版

東雲倫也

Physi-M@th

目次

第1章

$1+1=2$

第１節 はじめに

―某日、情報処理部部室にて―

■プロローグ(1+1 とは？)

どうも！花の高校１年生！野々原ゆずこです！
よろしくっ！！

こんにちは～。日向縁です～。
よろしくお願いします～！

こんにちは。櫟井唯です。よろしく。
というか、私たちどうして自己紹介しているんだ？

まぁそんなことは置いておいて、今日のテーマを決めよう！

いきなりだなぁ…… 部長、どうする？

え～？何も出ないよぉ～？

「愛」とか？

うるさい

「唯ちゃんに対する愛」とか？

///

唯ちゃんかわい～　……愛ってさ、

この話続けるのかよ。

私たちの唯ちゃんに対する愛は大きいんだよ？

そうだよ！私たちの愛には$1+1=2$じゃないんだよ！
$1+1$が 3 にも 4 にもなるんだよ！

あっ！それだ！

え？なにが？

テーマだよ！今日のテーマ！
簡単で奥深いテーマ！「1+1=2」！

簡単そうだしすぐ終わるよね。さっさと調べて遊びに行こ～！

部活のやる気があるのやらないのやら。

じゃあさっそくパソコンで調べてみよう！

第２節　準備

—同日、情報処理部部室にて—

■加法

そもそもさ、足し算って何なのかな？

数を足すことじゃないのか？

「愛」じゃないの？

まだそのネタ引きずるのか。

じゃあ、数って何？

１とか２とか？

でも普通は小数とか分数とかも数に入るよな。

でも今考えているのは1＋1だし、
ここは数を自然数に絞ってもいいんじゃないかな？

そうだな。

自然数について調べてみよ～！

HooYA!で「自然数」っと……
自然数全体のことをℕって表すんだって！知らなかった！

なんで二重の文字なの？

自然数が全部で 2 つだからじゃない？

んなわけあるか。

じゃあ愛n

うるさい！しつこい！

なんか集合と関係があるらしい。

あぁ～数 A のやつ？

そうそう！でも難しそうだから、この件は後回しにしよう！

今日はやけに適当だな。

そしてネットの情報によると、足し算とは自然数の集合から
自然数の集合への写像としてあらわすことができるらしいです。

どういうこと？

さぁ？

わけわかんないねぇ～

そして、自然数の公理っていうものにも写像を使うらしい。
ペアノの公理って言うんだって。

公理？

わけわかんないね～

わけわかんないねぇ～

わけがわからないな。

それじゃあ今後の目標を

1.集合や写像(？) について勉強する

2.ペアノの公理とやらを理解する

3.足し算の正体を暴く

とするのはどうでしょう？

いいんじゃないか？

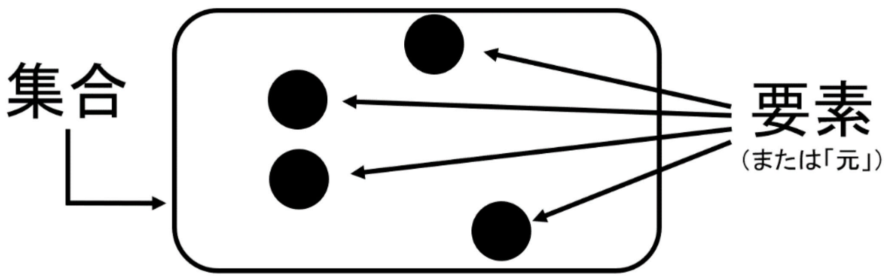
難しそう……

じゃあまずは集合について、一発頑張りますか……

■集合

集合自体はこの前数 A の授業で習ったよね。

そうだな。こんな感じだったっけ？



そうそう。

でもなんで集合なんて考えるの？

たとえばさ、生き物ってたくさんいるじゃん？

いきなりだな。

その中で光合成ができない生き物っているじゃん？

人間とかサメさんとか？

そうそう。でも一つ一つ種類を上げていくのは大変じゃん？

お、そうだな。

でも「動物」って言っちゃえば一言で表現できるよね。※1
つまり、「光合成ができない」という条件を満たす生き物を
ひとくくりにして、その集まりを「動物」って表現したってことだね。

たしかに一言で表現できるな。

べんりだね～

確か授業でも、集合の表し方で、集合をAとしたときに

$$A = \{x | x\text{が満たすべき条件}\}$$

っていうのがあったね。

ここでいうxは生き物の種類１つ１つのことだな。
で、満たすべき条件が「光合成をしない」だから、この条件を
満たすxは光合成をしない生き物１つ１つを表している。
そして、その生き物たち全体のことを動物っていうわけか。

動物＝$\{x \in$生き物$| x$は光合成しない$\}$
＝{ヒト、イヌ、ネコ、…（すべて列挙は不可能）※2

xっていうのが難しいよね～

「変数※3」だからいろいろな物の代わりになれるんだよね。

ニシローランドゴリラにもクロスリバーゴリラにも
マウンテンゴリラにもなれるんだね。

ゴリラ好きだな、おい。

そういうのを全部書き出すのが面倒くさいから、ちょっと抽象的にxって書いちゃったわけだね。かっこつけたかったんだね。

そういうわけじゃないと思うけどな。

この∈っていう記号は、この前の要素がこの後の集合に含まれているって意味ね！

だからさっきの集合の書き方だと、最初にxが生き物一つ一つを表す要素だよって宣言しておいて、そのうえで条件を指定しているってわけだね。

なるほど～

集合は意味自体は簡単だけど、書き方が難しいよね。

でも、図に書いてみれば意外と簡単だったりするんだよな。

■写像

写像って何だろうな。

聞いたことないね。

わたしも～。うつす？

見当もつかないな。

ここはいっちょ、HooYA!ってみますか！

わかった？

うーん、難しいけど、関数の「ゆるい」ものらしい。

ゆるいって？「y =だいたい 3」みたいな？

使い物になるのか……？それ……

なんか数学的じゃないね。

えっとね～、関数は出力が数じゃないとダメなんだけど、
写像は数じゃなくてもいいらしい。

数じゃないって想像できないな…。例えばどんなのがあるんだ？

ここに載っている例だと、アルファベットナンバーをアルファベットに
変える操作も写像として考えられるらしい。

入力		出力	入力		出力
1	→	A	は	→	A
8	→	H	い	→	I
15	→	O	く	→	U

1 を入力すると A を出力、みたいな感じか。
たしかに出力が数じゃなくてもしっくりくるな。

あとは入力したひらがなの母音を出力する操作とか。

入力が数以外でもいいんだね！

「あ」だったら A、「く」だったら U、

「ゆ」だったら U だね！

なんだよ急に……確かにそうだけど……

ゆいちゃんの「ゆ」！

ゆいちゃんの「ゆ」！

うるさいなぁ///

でも数学的にはこういう具体的な感じじゃなくて、
例えば集合の要素と要素を対応させることに使うらしい。

ここでさっきの話とつながるわけか。

「つながる」っていうのも写像っぽいよね。

そうか？

いわれるとそうでもないかも。

まぁ、写像っていうのは、何かと何かを対応づけるものって
考えておけばいいのかな？

その対応づけは1対1になってるのか？

いや、一般にはなっていないらしい。ただし、1つの入力に対して
何種類かの出力があるのはだめなんだって。※4

それがだめなら必ず1対1対応になるんじゃないの？

異なる入力でも同じ出力の場合は1対1にはならないんじゃない？
例えば2次関数$y = x^2$は、1を入力しても−1を入力しても
同じ出力1が得られるな。

たしかに～

その「1 対 1 対応」っていう考え方は、写像の性質の中の
「全単射」っていうものに当たるらしいよ。

ぜんたんしゃ？

写像の重要な性質の中に「単射」と「全射」っていうのがあって、
その二つの性質を同時に持つときに「全単射」って言うんだって。

なんだか難しいなぁ。

初めて聞く言葉だからねー

一つ一つ勉強していきますか……

お前いつも面倒くさそうだな！

●単射

ネットによると、単射っていうのは

集合 A を定義域、集合 B を値域とする写像$f: A \to B$が条件

$$({}^{\forall}a_1, a_2 \in \mathrm{A})[a\_1 \neq a\_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)]$$

を満たすとき、写像fを単射と呼ぶ。

ということらしいよ。

どうゆうこと？

よくわかんないな。最初からじっくり読むか。

(;∀;)みたいな文字は何？

全称限量子って言って、「任意の[※5]」っていうらしい。つまり、
集合 A のどんな要素 2 つを持ってきてもいいですよってことだね。

ちょっと良くわからないかも…

例えばa, bを自然数として、任意のa, bに対して、a/b=2 という式は
成り立たないよな。もちろん成り立つようなa, bはあるけど、
自由勝手に選んできたa, bでは成り立たない。だから任意じゃない。
でも、a/a=1 という式はどんな自由に選んできたaについても成り立つ。
つまり「任意の」aついて成り立つ、ってことでいいのか？